Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Параллельные реализации крестового метода интерполяционного приближения матриц и ТТ-крестового метода интерполяционного приближения тензоров.

Желтков Дмитрий Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: 7342316@mail.ru

Метод крестовой интерполяции даёт возможность получать малоранговое приближение матриц, вычислив лишь небольшое число элементов ([1], [2], [3]). Так, для построения приближения ранга r матрицы размера $m \times n$ требуется вычислить $O((m+n)r)$ её элементов, при этом общее число операций оценивается как $O((m+n)r)M+O((m+n)r^2)$, где M – сложность вычисления одного элемента матрицы. Отметим, что само значение ранга r, обеспечивающего требуемую точность приближения, находится в ходе работы крестового метода.

Обычно крестовый метод используется для матриц, не заданных явно в виде массива, а представленных как функция от двух целочисленных аргументов. Таким образом, крестовый метод особенно полезен для очень больших матриц и (или) в случае, когда вычисление каждого элемента матрицы достаточно сложно. Например, метод активно применяется при численном решении интегральных уравнений [2].

Открытие ТТ-формата для многомерных массивов (тензоров) дало возможность хранить громадные по числу элементов тензоры в виде относительно небольших ТТ-разложений [4]. В случае ограниченных ТТ-рангов объём памяти для хранения разложения зависит от размера исходного тензора логарифмически. К примеру, если тензор с $d = 10$ измерениями имеет по каждому направлению размер $n = 100$, то число содержащихся в нём элементов $N = n^d = 100^{10}$, и их практически невозможно ни хранить, ни вычислить (в ряде областей, например, квантовой химии, встречаются тензоры и заметно больших размеров). Если же ТТ-ранги ограничены некоторым r, то для хранения ТТ-разложения потребуется не более $ndr^2 = O(logN)$ ячеек памяти.

Для тензоров метод, позволяющий получить малопараметрическое представление не используя всех элементов, ещё более необходим, чем для матриц. Это обусловило появление ТТ-крестового метода [5]. Для тензора размерности d и размером по каждому измерению n данный метод позволяет получить приближение в ТТ-формате, используя всего $O(dnr^2)$ элементов исходного тензора. Общая сложность данного метода есть $O(dnr^2)T + O(dnr^3)$ операций, где T – количество операций для вычисления одного элемента тензора.

Однако, несмотря на логарифмическую сложность (от общего числа элементов тензора) ТТ-крестового метода, вычислительная работа может быть значительной по ряду причин: высокой сложности вычисления элемента тензора, больших рангов, больших размеров по некоторым направлениям. Кроме того, возможны проблемы с нехваткой оперативной памяти для хранения приближения. Таким образом, возникает задача параллельной реализации крестового и ТТ-крестового методов.

В данной работе были созданы эффективные параллельные реализации крестового метода интерполяции матриц и ТТ-крестового метода приближения тензоров: *OpenMP* для систем с общей памятью и гибридная *MPI+OpenMP* для систем с разделённой памятью.

Количество параллельный шагов реализованного алгоритма крестовой аппроксимации равно $O(r)M+O(r^2)$. Для ТТ-крестового метода количество параллельных шагов – $O(r)Td+O(r^3)d$. В обоих случаях все *MPI*-взаимодействия процессоров для гибридной *MPI+OpenMP* реализации коллективные, и их количество равно $O(r)$ и $O(r)d$, соответственно.

Отметим, что ТТ-крестовый метод использует матричный крестовый метод, таким образом, эффективность параллельной реализации ТТ-крестового метода зависит от эффективности параллельного матричного крестового алгоритма.

Приведём пример работы *OpenMP* версии ТТ-крестового метода для функции модели Вольтерра (используется в телекоммуникациях, [6]). Это комплекснозначная функция от 11 комплексных переменных, каждая из которых была дискретизирована на полярной сетке с 256 точками. Таким образом, получился 22-мерный тензор, с размером 256 по каждому направлению, т. е. общим числом элементов равным $256^{22} = 2^{176} \approx 10^{53}$. Тензор приближался с параметром точности равным 10^{-4}, в ходе аппроксимации было вычислено всего 3241181 элемент тензора, для хранения приближения в ТТ-формате используется только 500736 ячеек памяти. Зависимость времени нахождения аппроксимации от числа потоков приведена в таблице, представленной ниже.

Литература

1. S. A. Goreinov, E. E. Tyrtyshnikov, N. L. Zamarashkin, A Theory of Pseudoskeleton Approximations. // Linear Algebra Appl., 1997, 261, pp. 1-21.

2. Tyrtyshnikov E.E., Incomplete Cross Approximation in the Mosaic-Skeleton Method. // Computing, 2000, v.64, N 4, pp. 367-380.

3. Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E., The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices. // Contemporary Mathematics, 2001, Vol. 208, pp. 47-51.

4. Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E. Breaking the curse of dimensionality, or how to use SVD in many dimensions // SIAM J. Sci. Comput. 2009. Vol 31, 5. P. 3744-3759.

5. I. V. Oseledets, E. E. Tyrtyshnikov. TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and Applications. 2010. V. 432, no. 1. P. 70-88

6. Ling Liu, Liangchuan Li, Yuanda Huang, Kai Cui, Qianjin Xiong, Hauske, F.N., Changsong Xie, Yi Cai. Intrachannel Nonlinearity Compensation by Inverse Volterra Series Transfer Function // IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology , V. 30 i. 3, P. 310-316.

Таблица 1: Тестирование производительности *OpenMP* версии ТТ-крестового метода, функция модели Вольтерра

Число потоков	1	2	3	4	5	6	7	8
Время	151.216	76.27	50.99	38.47	30.89	25.81	22.26	19.91