Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Применение теории оптимального восстановления к некоторым задачам компьютерной томографии

Баграмян Тигран Эммануилович
Аспирант
Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия
E-mail: mybestzoo@gmail.com

В общем случае задача оптимального восстановления состоит в наилучшем приближении значения линейного оператора на некотором множестве по информации, являющейся значениями другого линейного оператора (называемого информационным), заданными с погрешностью в той или иной метрике (см. [1]-[2]). Рассмотрим класс функций Bh_2 - гармонических в единичном шаре $\mathbb{B}^d$, $d \geq 2$, для которых $\|f\|_{h_2} = \sup_{0\leq r<1} \|f(r\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1$. В качестве информационного оператора рассмотрим преобразование Радона - оператор, ставящий в соответствие функции множество ее интегралов, взятых вдоль всевозможных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, $Rf(\theta, s) = \int_{x\theta=s} f(x)dx, \quad (\theta, s) \in Z = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^1$. Такой оператор применяется для моделирования различных томографических процессов и подробно изучается в теории компьютерной томографии [3]. В теории оптимального восстановления информационные операторы этого типа рассматривались ранее в [1]. Предположим, что значение Rf известно с некоторой погрешностью, т.е. для данного числа δ нам известна функция $g \in L_2(Z)$, такая что $||Rf - g||_{L_2(Z)} \leq \delta$. Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции f по информации g. Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{B}^d)$, а погрешностью метода называется величина $e(\delta, m) = \sup_{f\in Bh_2} \sup_{||Rf-g||_{L_2(Z)}\leq\delta} ||m(g) - f||_{L_2(\mathbb{B}^d)}$. Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов $E(\delta) = \inf_{m:L_2(Z)\to L_2(\mathbb{B}^d)} e(\delta, m)$. Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

В работе получено явное выражение для погрешности оптимального восстановления и семейство методов, на которых эта погрешность достигается.

Литература

1. Michelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Numerical Analysis Lancaster 1984. Springer Berlin/Hidelberg.—1984.—P. 21–93.

2. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу". Владикавказ.—2009.—С. 158–192.

3. Natterer F. The mathematics of computerized tomography.— Stuttgart: John Wiley & Sons. 1986.