Секция «Математика и механика»

Моделирование процесса заводнения нефтеносного пласта с помощью эллиптических функций Вейерштрасса

Касаткин Андрей Евгеньевич
Аспирант
Самарский государственный университет, Механико-математический факультет, Самара, Россия
E-mail: Darantion_ Yar@mail.ru

Вторичные интенсивные методы добычи нефти - это настоящее и будущее нефтяной промышленности: они позволяют ей поддерживать свой высокий статус и развиваться для удовлетворения растущих потребностей общества. Исторически первым вторичным методом, случайно открытым в середине 1860-х гг. [3], стало заводнение: было установлено, что нагнетаемая в пласт вода способна восстановить упавшее давление и повысить объем извлекаемой нефти. Высокая эффективность новой технологии была подтверждена рядом опытных работ, проведенных в первой половине XX в. [2]. В настоящее время заводнение обеспечивает около половины добываемой США нефти.

Независимо от применяемой технологии, разработка любого месторождения - это длительный и сложный процесс, растянутый во времени на несколько лет, а, значит, требующий тщательного планирования. Ошибки в проектировании, игнорирование технически важных параметров пласта и флюидов неблагоприятно сказываются на результатах добычи, приводя к многомиллионным убыткам. Прогнозирование хода заводнения, улучшение технико-экономических показателей за счет подбора оптимальной схемы расстановки скважин - цель настоящего исследования.

Для моделирования нефтяного месторождения использовалась бесконечная комплексная плоскость, покрытая двоякопериодической решеткой L с параметрами ω_1 и ω_2 ($Im(\omega_2/\omega_1) > 0$). Скважины, разрабатывающие пласт, размещались в ее (решетки) узлах. В рассматриваемом случае задача фильтрации решалась с использованием квазипериодической функции Вейерштрасса $\zeta(z, \overline{z})$. Ниже приведено выражение для поля скоростей, создаваемого одиночной скважиной в элементарной ячейке решетки L [1]:

$$v(z,\overline{z}) = -\frac{Q}{2\pi h}(\overline{\zeta(z)} + \alpha\overline{z} - \beta z). \tag{1}$$

Здесь $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{m,n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2})$ – дзета-функция Вейерштрасса ($\omega = n\omega_1 + m\omega_2 : m, n \in \mathrm{Z}$), $\beta = \frac{\pi}{\Delta}$ (Δ – площадь элементарной ячейки), $\alpha = \frac{\beta\overline{\omega}_1 - 2\zeta(\omega_1/2)}{\omega_1}$ – параметр, обеспечивающий двоякопериодичность функции скорости $v(z, \overline{z})$, Q – мощность скважины, h – толщина пласта.

Благодаря линейности, рассмотренное представление (1) легко обобщается на случай включения нескольких скважин в ячейку решетки L:

$$\begin{gathered} v(z,\overline{z}) = -\sum_{u=1}^{n1}\frac{Q_u^{(prod)}}{2\pi}(\overline{\zeta}(z-z_u,\overline{z-z_u}) + \alpha(\overline{z-z_u}) - \beta(z-z_u)) + \\ \sum_{w=1}^{n2}\frac{Q_w^{(inject)}}{2\pi}(\overline{\zeta}(z-z_w,\overline{z-z_w}) + \alpha(\overline{z-z_w}) - \beta(z-z_w)). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $n1$ и $n2$ - число добывающих (мощности Q_u) и нагнетательных (мощности Q_w) скважин соответственно.

Основная задача, поставленная в работе, заключалась в расчете и построении траекторий фронта заводнения, расширяющегося со временем. Выражение для поля скоростей (2), представленное выше, вошло в состав главного уравнения:

$$\begin{aligned} m\frac{d\overline{z}}{dt} &= \overline{v}(z,\overline{z}), \\ z_{t=0} &= z_0 + r_w e^{i\theta}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь m – пористость, z_0 - центр нагнетательной скважины радиуса r_w. Интегрируя систему (3) по времени и меняя угол θ от 0 до 2π, можно получить “временные снимки” фронта заводнения. Для проведения расчетов использовались методы Рунге-Кутты, модифицированные с учетом коплексности переменных и их сопряженности. В итоге были построены картины движения нагнетаемой в пласт воды: ниже представлены изображения, полученные для пятиточечной (рис. 1) и семиточечной (рис. 2) схем заводнения. При расчете продвижения фронта воды дополнительно было измерено время t (в условных единицах) до начала обводнения добывающих скважин: последние показаны на рис.1 и рис. 2 двухцветными кружками.

Результаты проделанной работы могут быть использованы для качественного и количественного анализа схем заводнения: подсчитывая коэффициент извлечения нефти и время обводнения, можно оценить эффективность различных способов расстановки скважин.

Литература

1. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. // Вестник СамГУ, 2010, Т. 78, 4, С. 5-11.

2. Уиллхайт Г.П. Заводнение пластов. М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.

3. Уолкотт Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении. М., 2001.

Иллюстрации

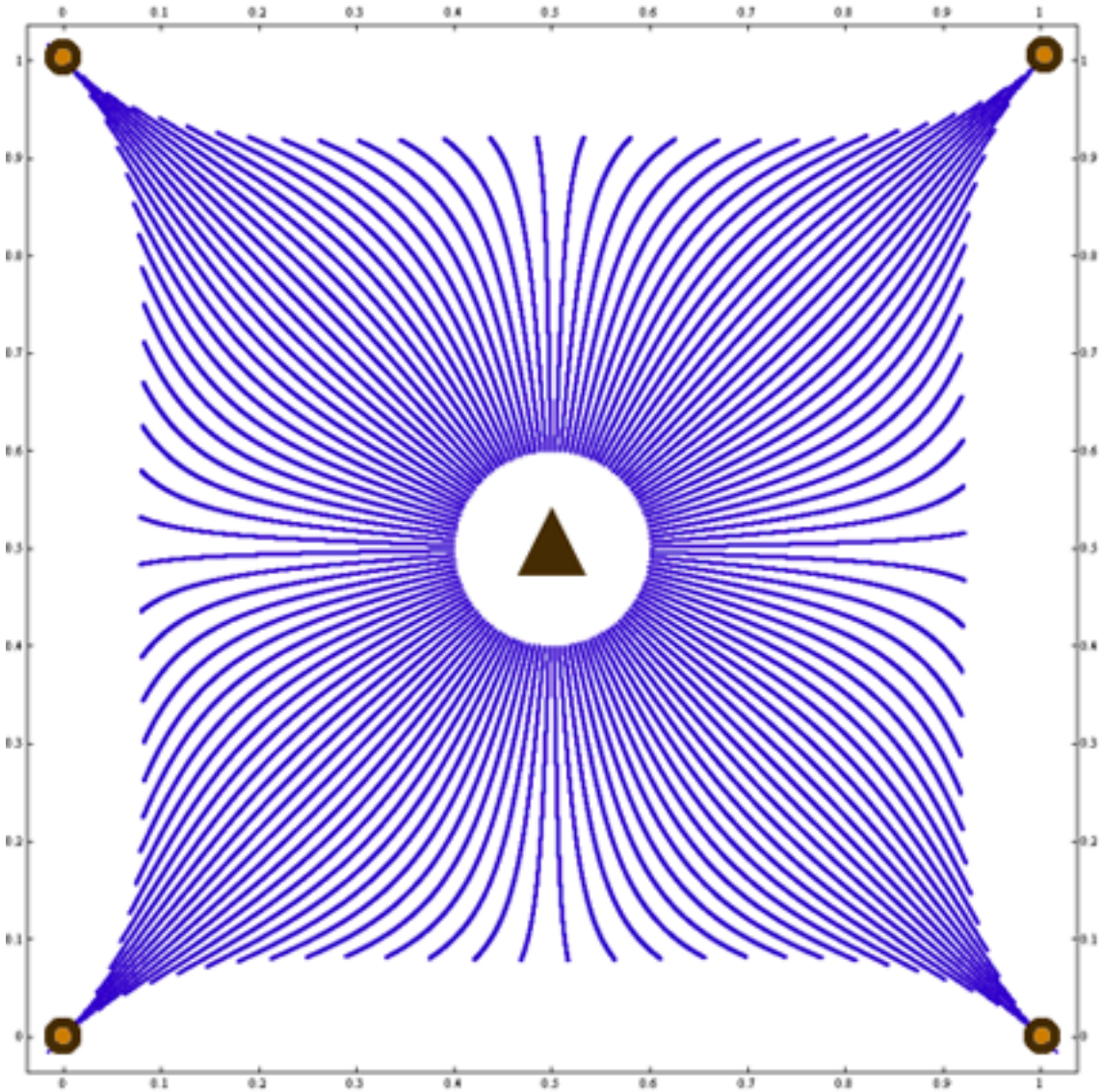

Рис. 1: Фронт заводнения для пятиточечной схемы (момент прорыва). Время начала обводнения (t) - 1100.

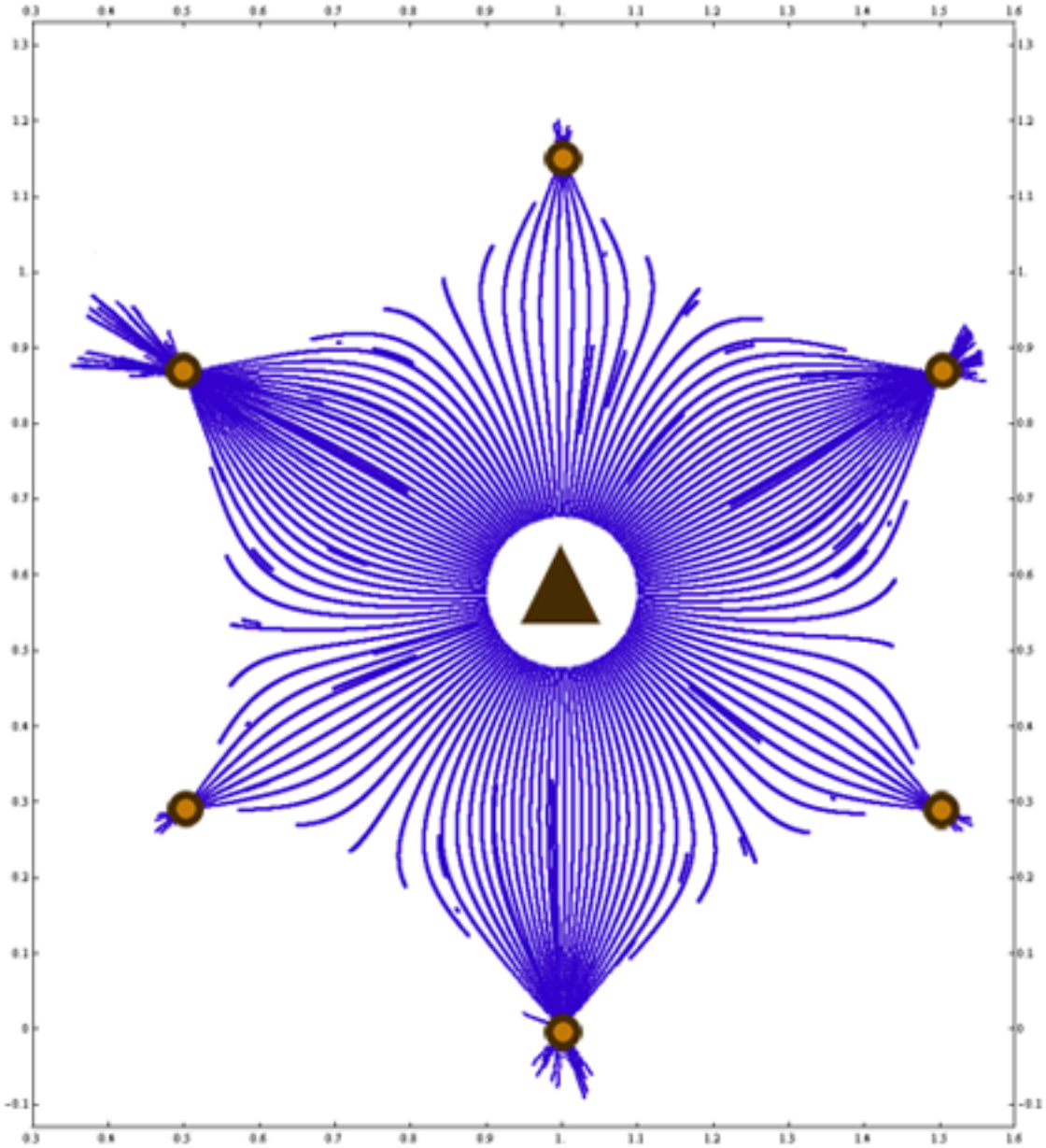

Рис. 2: Фронт заводнения для семиточечной схемы (момент прорыва). Время начала обводнения (t) - 750.