Секция «Математика и механика»

О существовании порождающих систем специального вида в классах монотонных функций k-значной логики

Дудакова Ольга Сергеевна

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: olga.dudakova@gmail.com

Известно, что при $k \leq 7$ все предполные классы в P_k являются конечно-порожденными, а начиная с $k = 8$ существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса; полного описания конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В ряде работ автора был получен критерий конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два, а также условия существования конечных порождающих систем для ряда других семейств классов монотонных функций. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Пусть $\preccurlyeq$ — частичный порядок на множестве $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, пусть $\mathcal{P} = (E_k, \preccurlyeq)$. Будем считать, что множество $\mathcal{P}$ имеет наименьший и наибольший элементы. Через $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ будем обозначать класс всех монотонных функций над $\mathcal{P}$ (отметим, что класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ предполный). Функцию $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ будем называть *функцией выбора*, если для каждого набора $(i, a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{P}^{k+1}$ выполняется равенство $\lambda(i, a_1, \ldots, a_k) = a_i$. Положим $\mathcal{P}_\lambda = \{(a, b_1, \ldots, b_k) \in \mathcal{P}^{k+1} \mid \text{ если } i \preccurlyeq j, \text{ то } b_i \preccurlyeq b_j\}$. Назовем *монотонной функцией выбора* функцию $\nu(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{M}_\mathcal{P}$, такую, что $\nu \mid_{\mathcal{P}_\lambda} = \lambda$. Известно, что если класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ содержит монотонную функцию выбора, то он является конечно-порожденным.

Ранее в работе автора [1] был получен следующий результат:

Теорема 1 [1]. *Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество ширины два. Класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ содержит монотонную функцию выбора тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in \mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$ существует либо* $\sup(a, b)$, *либо* $\inf(a, b)$.

Основным результатом настоящей работы является частичное обобщение теоремы 1 на случай множеств произвольной ширины.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное частично упорядоченное множество. Если класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ содержит монотонную функцию выбора, то для любой пары несравнимых элементов a_1 и a_2 множества $\mathcal{P}$, таких что a_1 и a_2 не имеют в $\mathcal{P}$ точной верхней грани, и для любой верхней грани с элементов a_1 и a_2, не сравнимой с некоторой минимальной верхней гранью b этих элементов, в $\mathcal{P}$ существует* $\sup(b, c)$.

Литература

1. Дудакова О. С. О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций k-значной логики // Материалы XVI Междунар. конф. "Проблемы теоретической кибернетики" (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та. — 2011. — С. 145–147.