Секция «Математика и механика»

Транспортные неравенства для диффузионных и условно-диффузионных процессов

Саранцев Андрей Андреевич
Аспирант
University of Washington, Seattle, Department of Mathematics, Сиэтл, Соединенные Штаты
E-mail: ansa1989@gmail.com

Цель настоящей работы: установить неравенства Талагранда для некоторого класса диффузионых процессов, а также обобщить эти результаты на условно-диффузионные процессы с помощью h-преобразований Дуба.

Пусть (E, ρ) - метрическое пространство, $\mathcal{P}(E)$ - семейство всех борелевских вероятностных мер на E. *Расстояние Вассерштайна порядка* $p \geq 1$ между мерами $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{P}(E)$ определяется как

$$\inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})} \left[\iint \rho^p(x, y) d\pi(x, y) \right]^{1/p},$$

где $C(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ есть множество борелевских вероятностных мер на $E \times E$, маргинальные распределения которых равны $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. *Информация по Кульбаку* (или *условная энтропия*) меры $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(E)$ по мере $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(E)$ определяется как

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q} \mid \mathbf{P}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}},$$

если $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$, и $+\infty$ в противном случае. Через $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}$, $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ обозначены математические ожидания по мерам $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$. Мера $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет *транспортному неравенству с показателем* p *и постоянной* $C > 0$, если для любой меры $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(E)$ имеем:

$$W_p(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \sqrt{2C\mathcal{H}(\mathbf{Q} \mid \mathbf{P})}.$$

В таком случае пишут: $\mathbf{P} \in T_p(C)$.

Впервые эти неравенства были введены К. Мартон в статье [5]. Она обнаружила их связь с явлением концентрации меры. Именно, пусть для всякого $A \subseteq E$ и для $r > 0$ $A_r := \{x \in E \mid \rho(x, A) \leq r\}$, где $\rho(x, A) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ - расстояние от x до A. Насколько отличается $\mathbf{P}(A_r)$ от 1? Рассмотрим функцию $\alpha(r) = \sup\{1 - \mathbf{P}(A_r) \mid \mu(A) \geq 1/2\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{P} \in T_1(C)$, *тогда для* $r \geq r_0 := 2\sqrt{2C \log 2}$ *имеем:*

$$\alpha(r) \leq e^{-r^2/8C}.$$

Заметим, что $T_p(C) \subseteq T_1(C)$ для $p > 1$, так что достаточно доказать, что $\mathbf{P} \in T_p(C)$.

Предпринимались различные попытки установить эти неравенства для распределений случайных величин или процессов (чаще всего, для $p = 1$ или $p = 2$); в частности, для диффузионных процессов или марковских цепей. См., напр., статьи [2] (Djellout et al), [6] (Pal), [8](Ustunel), книги [4] (Ledoux), [9] (Villani), или обзорную статью [3] (Gozlan et al).

Транспортные неравенства порядка 2 (называемые также *неравенства Талагранда*) важны еще и потому, что они связаны с другими функциональными неравенствами: неравенством Пуанкаре и др. (см. [4], [9]).

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ - фильтрованное вероятностное пространость, фильтрация $\mathbf{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет обычным условиям и порождена d-мерным броуновским движением $W = (W_t)_{t\geq 0}$. Пусть $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ - диффузионный процесс со значениями в $\mathbb{R}^d$, заданный следующим уравнением: $dX_t = dW_t + b(t, X_t)dt, \;\; X_0 = x$. Здесь $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ - коэффициент сноса, $x \in \mathbb{R}^d$ - начальное значение. Рассмотрим процесс X как случайный элемент в банаховом пространстве $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ с равномерной метрикой. В дальнейшем через $a \cdot b$ обозначим скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^d$; через $\mathbb{R}_+$ обозначим $[0, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть для всех $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено*

$$(b(t,x) - b(t,y)) \cdot (x - y) \leq \gamma ||x - y||^2.$$

Тогда распределение процесса X на $[0,T]$ удовлетворяет неравенству Талагранда с постоянной $C = 2Te^{2T^2\gamma^2}$.

Теорема 3. *Пусть $\gamma \geq 0, \;\; F : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$(b(t,x) - b(t,y)) \cdot (x - y) \leq -\gamma F(t) ||x - y||^2,$$

тогда распределение процесса X удовлетворяет $T_2(C)$ с постоянной

$$C = C_{\gamma,F} = \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \exp\left(-2\gamma \int_s^t F(u)du\right) ds.$$

В частности, при $\gamma = 0$ постоянная равна $C_{\gamma,F} = T$. Будем называть такой снос b (т.е. для которого $(b(t,x) - b(t,y)) \cdot (x - y) \leq 0$) *невозрастающим.*

Следствие. *Если для $\gamma > 0$ имеем: $(b(t,x) - b(t,y)) \cdot (x - y) \leq -\gamma ||x - y||^2$, то*

$$C = \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{2\gamma}.$$

Условные диффузионные процессы. Для всякого открытого $G \subseteq \mathbb{R}^d$ обозначим через $\tau_G := \inf\{t \geq 0 \mid W_t \notin G\}$ момент выхода из G. Фиксируем открытое множество $D \subseteq \mathbb{R}^d$ и момент $T > 0$. Рассмотрим событие $\{\tau_D > T\}$. Каково условное распределение $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ при условии, что это событие произошло? Обозначим условный процесс через $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$. Применим теорию h-преобразований Дуба. (См. [7] (Revuz, Yor), или [1] (Chung et al) Имеем: $\mathbf{P}\{\tau_D > T \mid W_t = x\} = \mathbf{P}^x\{\tau_D > T - t\} = h(T - t, x)$, где $h_t(x) = h(t,x) = \mathbf{P}^x\{\tau_D > t\}$, и X удовлетворяет уравнению:

$$dX_t = dB_t + \nabla_x \log h(T - t, X_t)dt,$$

где $B = (B_t)_{t\geq 0}$ - это d-мерное броуновское движение относительно условной меры (оно не совпадает с W!).

Теорема 4. *Функция* $x \mapsto \mathbf{P}^x\{\tau > t\}$ *логарифмически вогнута по* x *для всех* $t > 0$.

Напомним, что функция называется логарифмически вогнутой, если ее логарифм есть вогнутая функция. Значит, коэффициент сноса невозрастает, и распределение процесса X удовлетворяет $T_2(T)$.

Обобщим этот результат: пусть $dX_t = dW_t + \nabla b(X_t)dt$, где $X = (X_t)_{t\geq 0}$ принимает значения в $\mathbb{R}^d$, а $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Введем аналогичное обозначение: для открытого $G \subseteq \mathbb{R}^d$ пусть $\tau_G := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin G\}$.

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^d$ открыто, $T > 0$. Оказывается, условное распределение X при условии $\{\tau_D > T\}$ также удовлетворяет неравенству Талагранда. Имеем: $\mathbf{P}\{\tau_D > T \mid X_t = x\} = \mathbf{P}^x\{\tau_D > T - t\} = h(T-t, x)$, где $h_t(x) = h(t,x) = \mathbf{P}^x\{\tau_D > t\}$, и условный процесс Y удовлетворяет уравнению:

$$dY_t = dB_t + (\nabla b(Y_t) + \nabla_x \log h(T-t, Y_t))dt,$$

где $B = (B_t)_{t\geq 0}$ - это d-мерное броуновское движение.

Теорема 5. *Пусть* D *- строго выпуклая ограниченная область с гладкой* (C^∞) *границей. Пусть* b *удовлетворяет условию*

$$\alpha_* ||x-y||^2 \leq (\nabla b(x) - \nabla b(y)) \cdot (x-y) \leq \alpha^* ||x-y||^2.$$

Пусть также $V_b(x) := (\triangle b + ||\nabla b||^2)/2$ *удовлетворяет условию*

$$\alpha_V ||x-y||^2 \leq (\nabla V_b(x) - \nabla V_b(y)) \cdot (x-y).$$

Здесь α_*, α^*, α_V *- постоянные, не обязательно положительные. Тогда коэффициент сноса* $\beta(t,x) = \nabla b(x) + \nabla \log h(T-t, x)$ *удовлетворяет условию*

$$(\beta(t,x) - \beta(t,y)) \cdot (x-y) \leq \gamma ||x-y||^2, \ \gamma := K - \alpha^* + \alpha_*, \quad K := \max_{t\in[0,T]} k(t),$$

где k *есть решение задачи Коши* $k' = 2k^2 - \alpha_V, \quad k(0) = \alpha^*$.

Замечание. Зная γ, мы можем вычислить постоянную C для неравенства Талагранда по теоремам 2 и 3.

Неравенства Талагранда для гауссовских процессов.

Напомним известные факты из теории экстремумов гауссовских процессов. Пусть $G = (G_t)_{t\in[0,T]}$ - непрерывный действительнозначный гауссовский процесс с нулевым средним, и пусть $M := \sup_{[0,T]} G_t < \infty$. Тогда $\mathbf{E}M < \infty$, и для $r \geq 0$ имеем (см., например, [4]):

$$\mathbf{P}\{M - \mathbf{E}M > r\} \leq e^{-r^2/2C_{Var}}, \ \ C_{Var} := \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}G_t^2 < \infty.$$

Эта постоянная

$$C_{Var} := \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}G_t^2$$

появляется и в неравенстве Талагранда. Пусть в исходном уравнении $d = 1$ и $b(t,x) = A(t)x + a(t)$, где $A, a : [0,T] \to \mathbb{R}$ интегрируемы, т.е.

$$dX_t = dW_t + (A(t)X_t + a(t))dt, \ X_0 = x.$$

Такая диффузия является гауссовским процессом.

Теорема 6. *При вышеуказанных условиях распределение* X *на* $[0,T]$ *удовлетворяет* $T_2(C_{Var})$.

Литература

1. Kai Lai Chung, John B. Walsh. Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 249. 2005, Springer.

2. H. Djellout, A. Guillin, L. Wu. (2004) Transportation Cost-Information Inequalities and Applications to Random Dynamical Systems and Diffusions. // The Annals of Probability, 32(3B), 2702-2732.

3. Nathael Gozlan, Christian Leonard. (2010) Transport Inequalities. A Survey. // Markov Processes and Related Fields, 16, 635-736.

4. Michel Ledoux. The Concentration of Measure Phenomenon. Mathematical Surveys and Monographs, 89. 2001, American Mathematical Society.

5. K. Marton. (1996) Bounding $\bar{d}$-Distance by Informational Divergence: A Method to Prove Measure Concentration. // The Annals of Probability, 24(2), 857-866.

6. Soumik Pal. Concentration for Multidimensional Diffusions and Their Boundary Local Times. To appear in Probability Theory and Related Fields. Preprint available at arXiv: 1005.2217v3.

7. Daniel Revuz, Marc Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion, Third Edition. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 293. 1999, Springer.

8. A. S. Ustunel. Transportation Cost Inequalities for Diffusions under Uniform Distance. Preprint available at arXiv: 1009.5251v3.

9. Cedric Villani. Topics in Optimal Transportation. Graduate Studies in Mathematics 58. 2003, American Mathematical Society.

Слова благодарности

Я хотел бы выразить благодарность моему научному руководителю профессору Soumik Pal за его неустанное руководство, заботу и неоценимую помощь в научной работе, а также профессорам Krzysztof Burdzy и Zhen-Qing Chen за ценные советы.